EPREUVE de MATHEMATIQUES II

Durée 2 heures

Les trois parties du problème sont indépendantes.

L'usage des calculatrices est interdit

PRELIMINAIRE

Soient f et g, deux fonctions réelles de la variable réelle, continues sur le segment $[a,b]$; en remarquant que pour tout λ réel on a $\int_a^b \left(\lambda\ f(x)+g(x)\right)^2 dx$ positif ou nul, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx}\ .\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx}$$

NOTATIONS

$\Re$ désigne l'ensemble des nombres réels.
On définit une fonction $f : \Re^2 \to \Re$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y)$$

sur le domaine $D = [0,2\pi]^2$ en posant :

$$\forall (x,y) \in D \qquad \begin{array}{l} x > y \Rightarrow f(x,y) = y(2\pi - x) \\ y \ge x \Rightarrow f(x,y) = x(2\pi - y) \end{array}$$

On note E l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[0,2\pi]$ à valeurs réelles et qui s'annulent en 0 et en 2π

I Etude de la fonction f

1°) Montrer que f est une fonction continue sur D.

2°) Soit $x_0 \in]0,2\pi[$, étudier l'existence de la dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0,x_0).

3°) On se propose de rechercher le maximum et le minimum absolu de f sur D.
Pour cela : pour tout x de $[0,2\pi]$, étudier les variations de la fonction

$$\varphi : [0,2\pi] \to \Re$$
$$y \mapsto f(x,y)$$

En déduire alors les extrema absolus de f sur D, ainsi que les points où ils sont atteints.

II Etude d'un endomorphisme associé à f

1°) a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\Re$

b) Pour toute fonction φ de E, on pose $N(\varphi) = \sqrt{\int_0^{2\pi} \varphi^2(t)\ dt}$; montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

2°) Soit $\varphi \in E$, on définit la fonction

$$\psi : \Re \to \Re$$
$$x \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(y)\ f(x,y)\ dy$$
$$= \int_0^{x} \varphi(y)\ f(x,y)\ dy + \int_x^{2\pi} \varphi(y)\ f(x,y)\ dy$$

a) Montrer que l'application $\alpha : \varphi \mapsto \psi$ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de α . Est-ce que α est injective ?

c) Est-ce que α est surjective ?

3°) a) Calculer $C = \iint_D f^2(x,y)\ dx\ dy$.

b) Montrer que pour tout φ de E on a

$$N(\alpha\ (\varphi)) \leq \sqrt{C}\ .\ N(\varphi)$$

III Quelques applications numériques

On choisit un élément y_0 de $[0,2\pi]$, on note φ_0 la fonction réelle de la variable réelle x qui est 2π périodique et telle que :

$$\forall x \in [0,2\pi\ [\qquad \varphi_0(x) = f(x,y_0)$$

1°) Représenter le graphe de φ_0. Comment choisir y_0 de façon à ce que φ_0 soit paire ?

On prendra dorénavant cette valeur pour y_0.
On attend un énoncé complet et correct des théorèmes utilisés par la suite.

2°) Quels sont les coefficients de Fourier de φ_0?
Est-ce que la série de Fourier de φ_0 est convergente ?
Quelle est sa somme ?

3°) Calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

4°) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail